

# Analyse Numérique

Simone Deparis

June 4, 2023

## Contents

<b>1</b>	<b>Equations non-linéaires</b>	<b>2</b>
1.1	Méthode de Newton . . . . .	2
1.2	Methode de point fixe . . . . .	7
1.2.1	Exercice (1, Série 3) . . . . .	7
1.2.2	Critères d'arrêt . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Interpolation et approximation de données</b>	<b>15</b>
2.1	Position du problème . . . . .	15
2.1.1	Interpolation de données . . . . .	15
2.1.2	Interpolation de fonctions . . . . .	17
2.1.3	Matrice de Vandermonde . . . . .	18
2.1.4	Alternatives : polyfit et polyval . . . . .	20
2.2	Interpolation de Lagrange . . . . .	21
2.2.1	Base de Lagrange . . . . .	21
2.2.2	Polynôme d'interpolation . . . . .	23
2.3	Interpolation d'une fonction continue . . . . .	24
2.3.1	Erreur d'interpolation . . . . .	25
2.3.2	Interpolation de Chebyshev . . . . .	29
2.4	Interpolation par intervalles . . . . .	31
2.4.1	Interpolation linéaire par morceaux . . . . .	31
2.4.2	Exercice . . . . .	32
2.4.3	Exercice . . . . .	32
2.4.4	Erreur d'interpolation linéaire par morceaux . . . . .	33
2.4.5	Interpolation quadratique par morceaux . . . . .	33
2.5	Approximation au sens des moindres carrés . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Intégration numérique</b>	<b>40</b>
3.1	3.1 Formules de quadrature sur $[-1, 1]$ . . . . .	40
3.2	Intégration Numérique : Exercices . . . . .	40
3.2.1	Exercice Série 6, Ex 5 : Formule de Simpson . . . . .	41
3.2.2	Exercice Série 6, Ex 6 : Degré d'exactitude d'une formule de quadrature . . . . .	44
3.2.3	Exercice Série 6, Ex 7 : Convergence pour fonction non-lisse . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Résolution de systèmes linéaires</b>	<b>52</b>
4.1	Méthodes Directes . . . . .	52
4.1.1	Exercice 1 série 8 . . . . .	52
4.1.2	Critère de Sylvester . . . . .	55

4.1.3	Exercice 2 série 8	55
4.1.4	Problèmes de précision (Exercice 3 série 8)	58
4.2	Méthodes itératives	61
4.3	Méthode de Richardson	61
4.3.1	Exemple 1	62
4.3.2	Méthode de Jacobi	62
4.3.3	Méthode de Gauss-Seidel	63
4.3.4	Exercice	64
4.4	Exemple 2	64
4.5	Exemple 3 - Jacobi et Gauss-Seidel avec relaxation	65
4.6	Autres Exemples	74
4.7	Compléments	78
4.8	Problèmes d'arrondis	81
<b>5</b>	<b>Dérivée numérique</b>	<b>84</b>
5.1	Exercice	86
5.2	Exercice	88
5.3	Exercice	89
<b>6</b>	<b>Equations Différentielles Ordinaires</b>	<b>90</b>
6.1	Problème de Cauchy	90
6.2	Euler Progressif	91
6.3	Euler Retrograde	94
6.4	Stabilité	97
6.5	Convergence	98
6.6	Stabilité	101

## 1 Equations non-linéaires

**Objectif :** trouver les zéros (ou racines) d'une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  :

$$\alpha \in [a, b] : f(\alpha) = 0$$

## 3.1 Dichotomie

(Enlevé pour l'examen)

```
[1]: # importing libraries used in this book
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

### 1.1 Méthode de Newton

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable.

Soit  $x^{(0)}$  un point donné. On considère l'équation de la droite  $y(x)$  qui passe par le point  $(x^{(k)}, f(x^{(k)}))$  et qui a comme pente  $f'(x^{(k)})$ ,

$$y(x) = f'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) + f(x^{(k)}).$$