

Analyse Numérique

Simone Deparis

June 4, 2023

Contents

1 Equations non-linéaires	2
1.1 Méthode de Newton	2
1.2 Methode de point fixe	7
1.2.1 Exercice (1, Série 3)	7
1.2.2 Critères d'arrêt	13
2 Interpolation et approximation de données	15
2.1 Position du problème	15
2.1.1 Interpolation de données	15
2.1.2 Interpolation de fonctions	17
2.1.3 Matrice de Vandermonde	18
2.1.4 Alternatives : polyfit et polyval	20
2.2 Interpolation de Lagrange	21
2.2.1 Base de Lagrange	21
2.2.2 Polynôme d'interpolation	23
2.3 Interpolation d'une fonction continue	24
2.3.1 Erreur d'interpolation	25
2.3.2 Interpolation de Chebyshev	29
2.4 Interpolation par intervalles	31
2.4.1 Interpolation linéaire par morceaux	31
2.4.2 Exercice	32
2.4.3 Exercice	32
2.4.4 Erreur d'interpolation linéaire par morceaux	33
2.4.5 Interpolation quadratique par morceaux	33
2.5 Approximation au sens des moindres carrés	35
3 Intégration numérique	40
3.1 3.1 Formules de quadrature sur $[-1, 1]$	40
3.2 Intégration Numérique : Exercices	40
3.2.1 Exercice Série 6, Ex 5 : Formule de Simpson	41
3.2.2 Exercice Série 6, Ex 6 : Degré d'exactitude d'une formule de quadrature	44
3.2.3 Exercice Série 6, Ex 7 : Convergence pour fonction non-lisse	49
4 Résolution de systèmes linéaires	52
4.1 Méthodes Directes	52
4.1.1 Exercice 1 série 8	52
4.1.2 Critère de Sylvester	55

4.1.3	Exercice 2 série 8	55
4.1.4	Problèmes de précision (Exercice 3 série 8)	58
4.2	Méthodes itératives	61
4.3	Méthode de Richardson	61
4.3.1	Exemple 1	62
4.3.2	Méthode de Jacobi	62
4.3.3	Méthode de Gauss-Seidel	63
4.3.4	Exercice	64
4.4	Exemple 2	64
4.5	Exemple 3 - Jacobi et Gauss-Seidel avec relaxation	65
4.6	Autres Exemples	74
4.7	Compléments	78
4.8	Problèmes d'arrondis	81
5	Dérivée numérique	84
5.1	Exercice	86
5.2	Exercice	88
5.3	Exercice	89
6	Équations Différentielles Ordinaires	90
6.1	Problème de Cauchy	90
6.2	Euler Progressif	91
6.3	Euler Retrograde	94
6.4	Stabilité	97
6.5	Convergence	98
6.6	Stabilité	101

1 Équations non-linéaires

Objectif : trouver les zéros (ou racines) d'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$:

$$\alpha \in [a, b] : f(\alpha) = 0$$

3.1 Dichotomie

(Enlevé pour l'examen)

```
[1]: # importing libraries used in this book
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

1.1 Méthode de Newton

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction différentiable.

Soit $x^{(0)}$ un point donné. On considère l'équation de la droite $y(x)$ qui passe par le point $(x^{(k)}, f(x^{(k)}))$ et qui a comme pente $f'(x^{(k)})$,

$$y(x) = f'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) + f(x^{(k)}).$$